

CORRECTION TD - I1

EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Spire dans un champ magnétique variable

★☆☆ 2427

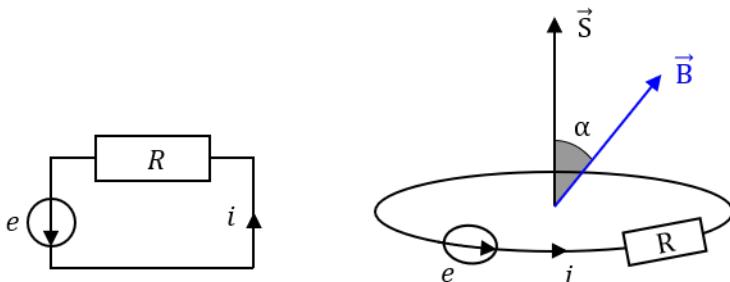
1) Flux :

$$\phi = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}_0 e^{-t/\tau} \cdot \vec{S} = [B_0 S \cos(\alpha) e^{-t/\tau}]$$

2) Force électromotrice induite :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{B_0 S}{\tau} \cos(\alpha) e^{-t/\tau}$$

3) Schéma équivalent de la spire et vue « 3D » :

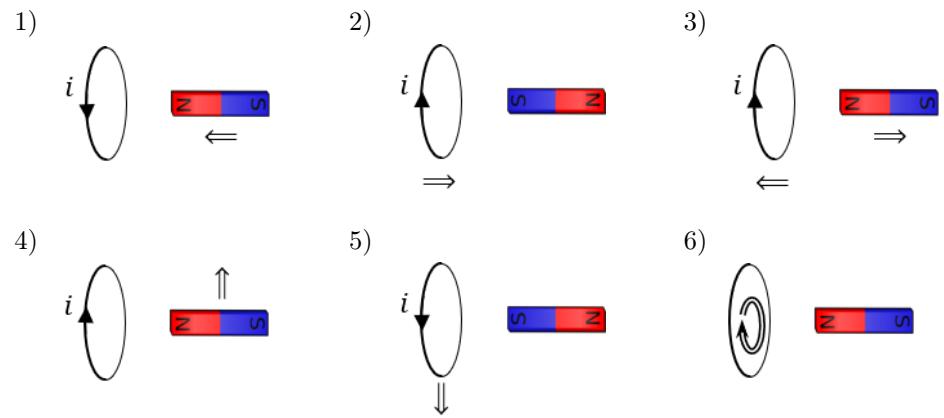


Ainsi,

$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{B_0 S}{R\tau} \cos(\alpha) e^{-t/\tau} > 0$$

Ex. n°2 • Signe d'un courant induit

★☆☆ 1017



7) $i < 0$

9) $i > 0$

8) $i > 0$

10) $i > 0$

Ex. n°3 • Induction mutuelle entre deux bobines

★☆☆ 4247

1) Le flux de \vec{B}_2 à travers une spire vaut :

$$\phi_{2 \rightarrow 2s} = \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_2 = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{d_2} \vec{u}_z \cdot S_2 \vec{u}_z = \frac{\mu_0 N_2 S_2 i_2}{d_2}$$

On en déduit le flux propre :

$$\phi_{2 \rightarrow 2} = N_2 \times \phi_{2 \rightarrow 2s} = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2 i_2}{d_2}$$

2) Par définition :

$$L_2 = \frac{\phi_{2 \rightarrow 2}}{i_2} = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2}{d_2}$$

3) Le flux de \vec{B}_2 à travers une spire de la bobine 1 vaut :

$$\phi_{2 \rightarrow 1s} = \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1 = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{d_2} \vec{u}_z \cdot S_1 \vec{u}_z = \frac{\mu_0 N_2 S_1 i_2}{d_2}$$

Remarque : ici, $S_1 = S_2$

On en déduit le flux :

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 \times \phi_{2 \rightarrow 1s} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 i_2}{d_2}$$

4) Par définition :

$$M = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{i_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{d_2}$$

5) Ici, les deux bobines sont longues et on a : $d_1 = d_2 = d$; $S_1 = S_2 = S$. Ainsi,

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{d} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{d} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{d} = \sqrt{L_1 L_2}$$

6) \vec{B}_2 est non nul dans la bobine 2 mais nul à l'extérieur (donc en particulier entre les deux bobines).

Le champ \vec{B}_2 étant nul à l'extérieur de la bobine 2, le flux est nul également dès que $r > R_2$:

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 \times B_2 S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2 i_2}{d_2}$$

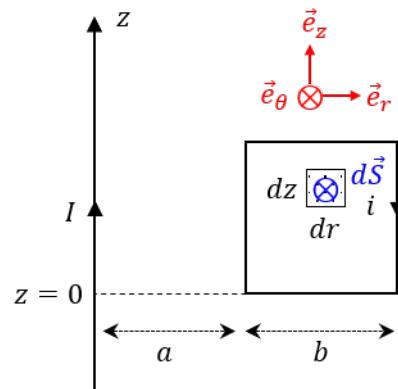
Ainsi,

$$M = \frac{\phi_{2 \rightarrow 1}}{i_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{d_2}$$

Ex. n°4 • Inductance mutuelle entre une spire et un fil

★☆☆ 5606

1) On indique la base cylindrique.



Par définition du flux, on a :

$$\begin{aligned} \phi_{f \rightarrow s} &= \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{z=0}^a \int_{r=b}^{b+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot (dz dr \vec{u}_\theta) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^a dz \int_b^{b+a} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{a}\right) \end{aligned}$$

2) Par définition,

$$\phi_{f \rightarrow s} = MI \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{a}\right)$$

Ex. n°5 • Circuits RL couplés

★★★ 5947

1) Deux lois des mailles donnent :

$$\begin{cases} u = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

2) On passe les équations en complexes.

$$\begin{cases} U_m = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I_1} + j\omega M \underline{I_2} \\ 0 = (R_2 + j\omega L_2) \underline{I_2} + j\omega M \underline{I_1} \end{cases}$$

La deuxième équation donne :

$$\underline{I_2} = -\frac{j\omega M \underline{I_1}}{R_2 + j\omega L_2}$$

On injecte dans la première équation :

$$U_m = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I_1} + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2} \underline{I_1}$$

On en déduit :

$$\underline{I_1} = \frac{U_m}{R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}} \quad \text{et} \quad \underline{I_2} = -\frac{j\omega M \underline{I_1}}{R_2 + j\omega L_2}$$

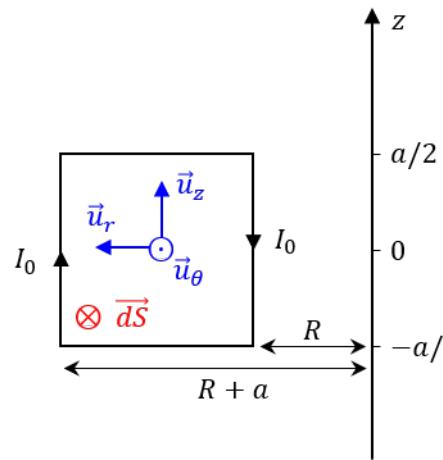
POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°6 • Inductance propre d'une bobine torique



6569

Schéma :



Calculons le flux à travers une surface carrée du tore (attention au sens de $d\vec{S}$ imposée par le sens de passage du courant).

$$\phi_1 = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec : } d\vec{S} = -drdz \vec{u}_\theta$$

Ainsi :

$$\phi_1 = \frac{N\mu_0 I_0}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} \int_{-a/2}^{a/2} dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi_1 = \frac{N\mu_0 a I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)}$$

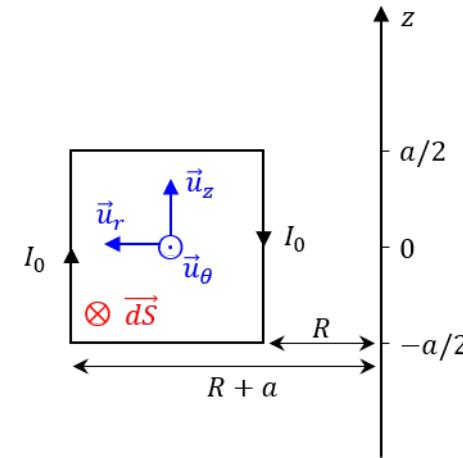
Donc le flux total (flux propre) et l'inductance :

$$\boxed{\phi_{tot} = \frac{N^2 \mu_0 a I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{L = \frac{\phi_{tot}}{I_0} = \frac{N^2 \mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)}$$

Ex. n°7 • Pince ampèremétrique

★★★ 6281

1) Schéma :



Calculons le flux à travers une surface carrée du tore (attention au sens de $d\vec{S}$ imposée par le sens de passage du courant).

$$\phi_{0 \rightarrow \text{une spire}} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec : } d\vec{S} = -drdz \vec{u}_\theta$$

Ainsi :

$$\phi_{0 \rightarrow \text{une spire}} = \frac{N\mu_0 i_0}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} \int_{-a/2}^{a/2} dz = \frac{N\mu_0 a i_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Donc le flux total (flux propre) et l'inductance :

$$\phi_{0 \rightarrow 0} = \frac{N^2 \mu_0 a i_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \quad \text{et} \quad \boxed{L_b = \frac{\phi_{0 \rightarrow 0}}{i_0} = \frac{N^2 \mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)}$$

Pour trouver M nous allons déterminer le flux du tore dans la spire $\phi_{0 \rightarrow 1}$. Pour cela, on peut remarquer que le flux de \vec{B} à travers la spire 1 se limite au flux de \vec{B} à travers une portion de la surface de la spire 1 équivalente à une spire du tore, puisque $\vec{B} = \vec{0}$ en dehors du tore. Il s'agit du même calcul que précédemment, au signe près :

$$\phi_{0 \rightarrow 1} = \phi_{0 \rightarrow \text{une spire}} = \frac{N\mu_0 a i_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Ainsi,

$$M = \frac{\phi_{0 \rightarrow 1}}{i_0} = \frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

2) Une loi des mailles dans le tore :

$$0 = R_b i_0 + L_b \frac{di_0}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

En notation complexe, on obtient :

$$0 = (R_b + j\omega L_b) \underline{I}_0 + j\omega M I_1 \Rightarrow \underline{I}_0 = -\frac{j\omega M I_1}{R_b + j\omega L_b}$$

On en déduit l'amplitude :

$$I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{\omega M I_1}{\sqrt{R_b^2 + (\omega L_b)^2}}$$

et la phase :

$$\varphi = \arg(\underline{I}_0) = \arg\left(-\frac{j\omega M I_1}{R_b + j\omega L_b}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega L_b}{R_b}\right)$$

On en déduit :

$$i_0(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Si $R_b \ll \omega L_b$, l'expression précédente devient :

$$\underline{I}_0 \simeq -\frac{j\omega M I_1}{j\omega L_b} = -\frac{M I_1}{\omega L_b} = -\frac{I_1}{N} \Rightarrow \begin{cases} I_0 \simeq \frac{I_1}{N} \\ \varphi = -\pi \end{cases}$$

On en déduit :

$$i_0(t) \simeq -\frac{I_1}{N} \cos(\omega t)$$

On a réalisé un transformateur de courant, ainsi la mesure de I_0 permet d'en déduire $I_1 = NI_0$, sans introduire d'ampèremètre dans le circuit où circule $i_1(t)$. C'est le principe de fonctionnement d'une pince ampèremétrique.

Ex. n°8 • Circuits LC couplés

★★★

3606

1) La loi des mailles dans chaque circuit donne :

$$\begin{aligned} 0 &= v_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= v_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= v_1 + LC \frac{d^2v_1}{dt^2} + MC \frac{d^2v_2}{dt^2} \\ 0 &= v_2 + LC \frac{d^2v_2}{dt^2} + MC \frac{d^2v_1}{dt^2} \end{aligned}$$

2) On prend la somme et la différence des deux équations obtenues précédemment. On obtient :

$$0 = \sigma + (LC + MC) \frac{d^2\sigma}{dt^2} \quad \text{et} \quad 0 = \delta + (LC - MC) \frac{d^2\delta}{dt^2}$$

On pose :

$$\omega_\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC + MC}} \quad \text{et} \quad \omega_\delta = \frac{1}{\sqrt{LC - MC}}$$

Ainsi,

$$\ddot{\sigma} + \omega_\sigma^2 \sigma = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\delta} + \omega_\delta^2 \delta = 0$$

3) Solutions générales :

$$\sigma(t) = A \cos(\omega_\sigma t) + B \sin(\omega_\sigma t) \quad \text{et} \quad \delta(t) = C \cos(\omega_\delta t) + D \sin(\omega_\delta t)$$

Les conditions initiales du problème imposent :

$$\begin{cases} i_1(0^-) = 0 \\ i_2(0^-) = 0 \\ v_1(0^-) = E \\ v_2(0^-) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(0^+) = 0 \\ i_2(0^+) = 0 \\ v_1(0^+) = E \\ v_2(0^+) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma(0^-) = E \\ \delta(0^-) = E \\ \dot{\sigma}(0^-) = 0 \\ \dot{\delta}(0^-) = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sigma(t) = E \cos(\omega_\sigma t) \quad \text{et} \quad \delta(t) = E \cos(\omega_\delta t)$$

Finalement,

$$v_1(t) = \frac{E}{2} [\cos(\omega_\sigma t) + \cos(\omega_\delta t)] \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{E}{2} [\cos(\omega_\sigma t) - \cos(\omega_\delta t)]$$

Où avec l'aide du formulaire :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= E \cos\left(\frac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2} t\right) \\ v_2(t) &= -E \sin\left(\frac{\omega_\sigma + \omega_\delta}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_\sigma - \omega_\delta}{2} t\right) \end{aligned}$$

4) On a :

$$\omega_\sigma = \frac{1}{\sqrt{LC + MC}} = \omega_0 \left(1 + \frac{M}{L}\right)^{1/2} = \boxed{\omega_0 \left(1 - \frac{M}{2L}\right)}$$

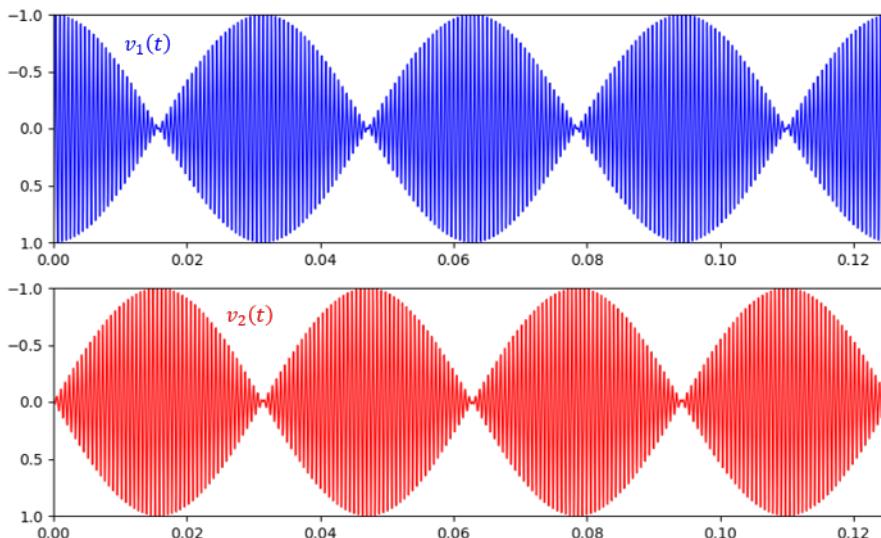
De même,

$$\omega_\delta = \frac{1}{\sqrt{LC - MC}} = \omega_0 \left(1 - \frac{M}{L}\right)^{1/2} = \boxed{\omega_0 \left(1 + \frac{M}{2L}\right)}$$

5) On en déduit :

$$v_1(t) = E \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_0 M}{2L} t\right)}_{= \text{env}(t)} \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad v_2(t) = E \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_0 M}{2L} t\right)}_{= \text{env}(t)} \sin(\omega_0 t)$$

Le terme d'enveloppe est le terme qui varie le plus lentement. Il s'agit de la fonction de faible pulsation (donc grande période). Pour tracer ces fonctions, il faut alors (comme pour des oscillations amorties), tracer $\pm \text{env}(t)$. La vraie fonction oscille dans l'enveloppe $2L/M = 100$ fois plus rapidement que l'enveloppe.



POUR S'ENTRAÎNER AU DS

Ex. n°9 • DéTECTEUR DE métAUX



1) Loi des mailles dans un *RLC* série :

$$\begin{aligned} e(t) &= u_R + u_L + u_C \\ &= Ri + L \frac{di}{dt} + u_C \\ &= RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C \end{aligned}$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e(t)}{LC}$$

On identifie alors la pulsation propre :

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

2) Dans chaque circuit, on écrit la loi des mailles. On note i_1 le courant dans l'oscillateur et i_2 dans le métal.

$$\begin{cases} e(t) = u_R + u_C + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = L_m \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad e(t) = u_R + u_C + L' \frac{di_1}{dt}$$

Combinons les deux équations de gauche afin de retrouver celle de droite.

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_m} \frac{di_1}{dt} \Rightarrow e(t) = u_R + u_C + \left(L - \frac{M^2}{L_m}\right) \frac{di_1}{dt}$$

On identifie donc :

$$\boxed{L' = L \left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right)}$$

3) La nouvelle fréquence f_d d'oscillation du détecteur vaut :

$$f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right)^{-1/2} \simeq f_r \left(1 + \frac{M^2}{2LL_m}\right)$$

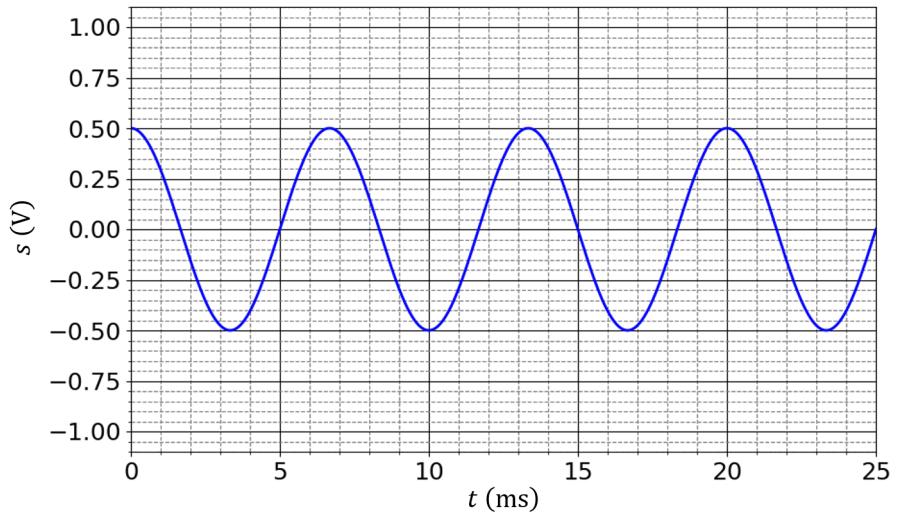
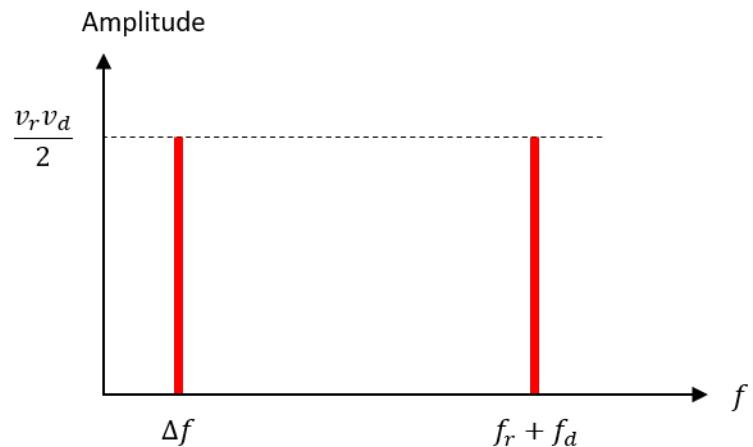
Ainsi,

$$\boxed{\Delta f = f_r \cdot \frac{M^2}{2LL_m}}$$

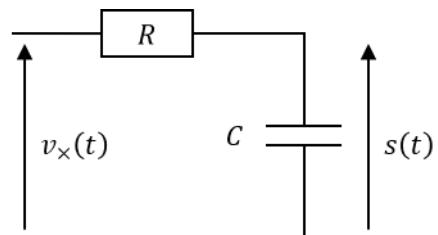
4) En sortie du multiplicateur :

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{r0}v_{d0} \cos(2\pi f_r t) \cos(2\pi f_d t) \\ &= \frac{v_{r0}v_{d0}}{2} [\cos(2\pi \Delta f t) + \cos(2\pi (f_r + f_d)t)] \end{aligned}$$

Le spectre de ce signal est :



5) On souhaite conserver la composante basse fréquence. Il faut un filtre passe-bas (par exemple, le RC ci-dessous). Il faut choisir la fréquence de coupure juste au-dessus de Δf de sorte à couper au maximum la composante haute fréquence.



6) L'écart Δf est la fréquence des oscillations lentes visibles sur la figure de l'énoncé.
On mesure alors une période de :

$$T = \frac{20 \text{ ms}}{3} = 6,67 \text{ ms} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta f = \frac{1}{T} = 150 \text{ Hz}}$$

En sortie du filtre passe-bas, on aura un signal sinusoïdal de fréquence Δf et d'amplitude 0,5 V environ.